12.5.25

Taylor Approximation

Potenzreihen

f ist in x_0 diffbar

$$\Rightarrow f(x) \sim \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{T_1(x)}$$

$$f(x) - T(x) =: R(f, x, x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(f, x, x_0)}{x - x_0} = 0.$$

f $(n+1)$-mal diff.bar in x_0

$\rightsquigarrow$

$$f(x) \sim \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n(x)}$$

$$f(x) - T_n(x) =: R_n(f, x, x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(f, x, x_0)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Satz

$(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von

stetige Funk. $f_n : D \to \mathbb{R}$

Falls $f_n \to f$ gleichmässig,

Dann ist f auch stetig.

$$f_n \xrightarrow[\text{glm}]{} f \iff \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Frage $(f_n)_{n\geq 1}$ diff. bare Funktionen

$f_n : D \to \mathbb{R}$

$f_n \to f$ gleichmässig?

Ist f diff. bar?. Nein!

Bsp. $f_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}$

$f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$.

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}}$$

$$f_n \xrightarrow[\text{glm}]{} f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$

$f(x) = |x|$ ist nicht diff. bar.

Satz (f_n) eine Folge in $C^1(a,b)$ mit

$f_n \xrightarrow[\text{glm.}]{} f$ und $f_n' \xrightarrow[\text{glm}]{} g$

wobei $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$

Dann gilt $f \in C^1(a,b)$

und $f' = g$.

Satz Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

eine Potenzreihe mit

Positiven Konvergenzradius $\rho > 0$

Dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$

auf $(x_0-\rho, x_0+\rho)$

differenzierbar

und $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-x_0)^{k-1}$

$\forall x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$.

und ist f, $\forall x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$

Glatt.

Kor $f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!}(x-x_0)^{k-j}$

Insbesondere

$$\boxed{c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}}$$

Beweis $f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x_0-x_0)^{k-1}$

$= 1 \cdot c_1$

Da $(x-x_0)^{k-1} = \begin{cases} 0 & k \neq 1 \\ 1 & k = 1 \end{cases}$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, c_k (x-x_0)^{k-2}$$

$$x \in (x_0 - \rho,\ x_0 + \rho)$$

$$f''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot c_2$$

$$c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

Bmk. Man kann Potenzreihen in ihrem Konvergenzbereich gliedweise differenzieren!

Bsp. ①

$$\mathrm{Exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Exp}'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\, x^{k-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \qquad k-1 = \ell$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell!} = \mathrm{Exp}(x)$$

② $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad |x| < 1$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{+1}{(1-x)^2}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

Taylor Approximation.

Ausgangsfrage:

Wie kann man $f(x)$ in der nähe von x_0 approximieren?

1. Antwort $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist eine gute App. falls f in x_0 diff.bar ist.

Frage: Gibt es poly. von Grad 2, 3, ... dass für f in der nähe von x_0 eine gute App. liefert?

(Taylor Approximation)

Satz Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

stetig, und in (a, b)

$(n+1)$-mal differenzierbar.

Für $\forall x \in (a, b]$, es gibt

$\xi \in (a, x)$ mit

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}$$

$T_n(f, x, a)$ - Taylor Poly von f vom Grad n

Entwicklungspunkt a

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}}$$

Fehler.

Bmk.

$$\frac{\text{Fehler}}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\text{Fehler}}{(x-a)^n} = 0$$

Defn a heisst Entwicklungspunkt

Bsp. Falls f 3-mal diff-bar. Dann

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \text{fehler}$$

$$\text{fehler} = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-a)^3$$

für ein $\xi \in (x,a)$

Kor. Wir haben die Abschätzung für Fehler

$$|R_n(f,x,a)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \sup_{a<c<x}\left(\left|f^{(n+1)}(c)\right| \left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\right)$$

Bsp: Taylor Entwicklung der exp. Funktion

Sei $f(x) = e^x$, $x_0 = a = 0$

$$T_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)(x-0)}{1}$$

$$= 1 + x$$

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$\vdots$

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Für $x \in (0,1)$

$$e^x - T_n(x) = R_n(e^x, x, 0)$$

$$= e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\xi \in (0,1)$

$$|\text{Fehler}| < \sup_{0<\xi<1} \left| e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

$$\leq \frac{e^1 \cdot 1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

For $n = 5$, $\forall x \in (0,1)$

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

mit $|\text{Fehler}| < \frac{3 \cdot x^6}{6!}$

$$e^{0.5} \sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^5 \cdot 5!}$$

$$|\text{fehler}| < 3 \cdot \underbrace{\frac{1}{2^6}}_{(x-0)^6} \cdot \frac{1}{6!}$$

Bsp. $\sin x$ mit Ent-punkt $x = 0$

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x \qquad f'''(x) = -\cos x$

$$\sin x = \sin 0 + (\cos 0)x - (\sin 0)\frac{x^2}{2!} - (\cos 0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

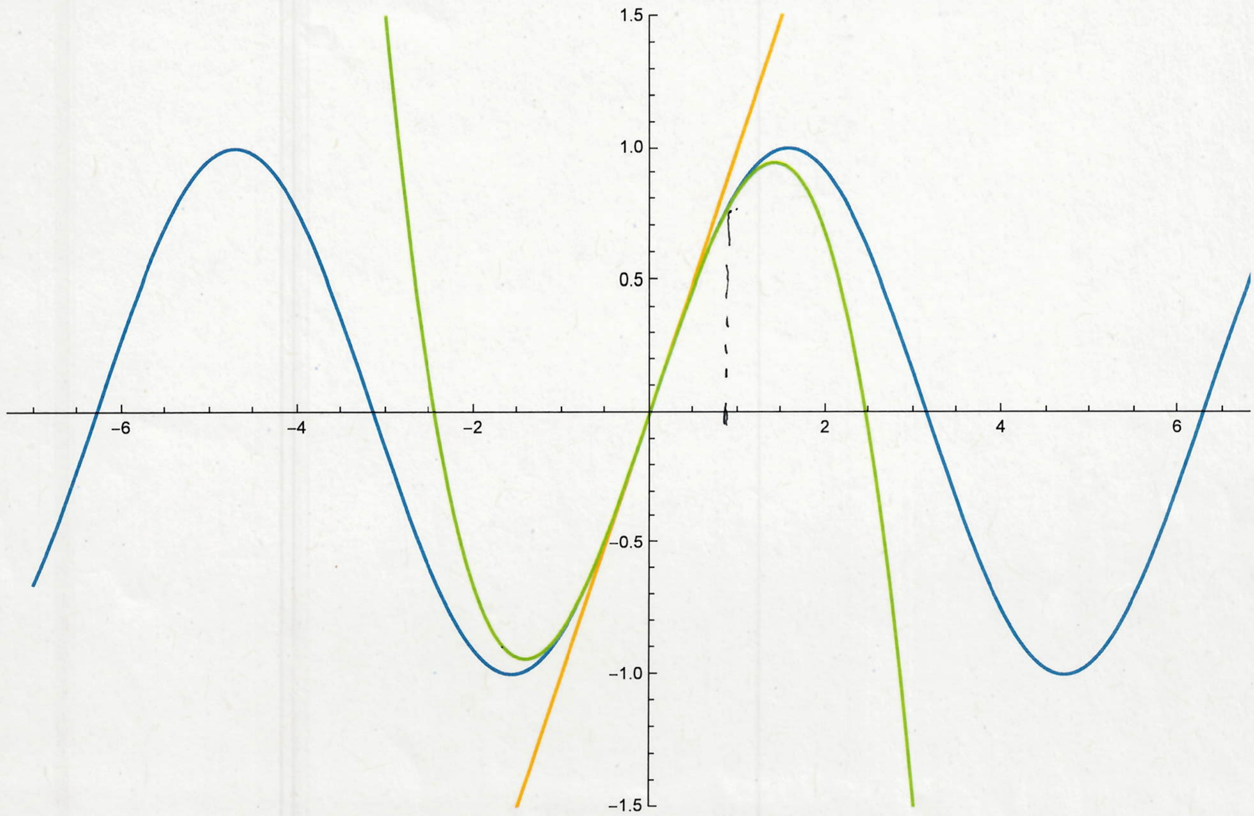
$T_1(x) = x = T_2(x)$

$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} = T_4(x)$

Bsp.

```
In[3]:= Plot[{Sin[x], x, x - x^3 / 6}, {x, -7, 7}, PlotRange → {-1.5, 1.5}]
```

Out[3]=



$f(x) = \sin x$

$T_1(x) = T_2(x) = x$

$T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

Extrema und die Ableitung

f ist diff.

f hat in x_0 ein Extrema

$\Longrightarrow f'(x_0) = 0$

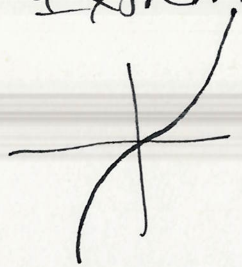
Bmk. $f'(x_0) = 0$

$\not\Longrightarrow f$ in x_0 ein Ext hat

Bsp: $f(x) = x^3$

$f'(0) = 0$ Aber $x = 0$

ist kein Extrema.



$f'' > 0 \Longrightarrow f$ konvex

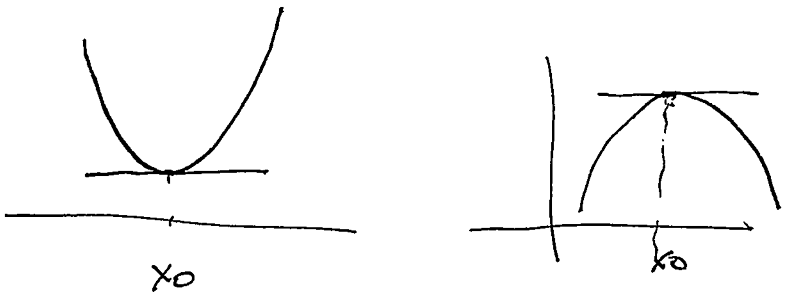
$f'' < 0 \Longrightarrow f$ ist konkav.

Kor $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, in (a, b) 2-mal diffbar. Sei $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = 0$

Dann

1. Falls $f''(x_0) > 0$ ist, ist x_0 strikte lok. min

2. Falls $f''(x_0) < 0$ ist, ist x_0 strikt. lok. max.



Beweis: Da f'' stetig ist und $f''(x_0) > 0$ ist, folgt dass $\exists\, \delta > 0$ so dass $f''(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

(Stetige Funktionen können nicht ihre Werte plötzlich ändern).

Aus der Taylor Approx Satz $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ein $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ so dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2}_{\text{Fehler}}$$

$$f(x) = f(x_0) + 0 \cdot (x - x_0) + \text{Fehler}$$
$$= f(x_0) + \text{Fehler}$$

$$\text{Fehler} = \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}}_{>0} \underbrace{(x - x_0)^2}_{>0}$$

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

$f(x) = f(x_0) + \text{Positive}$

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\Rightarrow f(x) > f(x_0)$

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\Rightarrow$ x_0 ist ein strikt lok. min

Frage: Was passiert im Fall

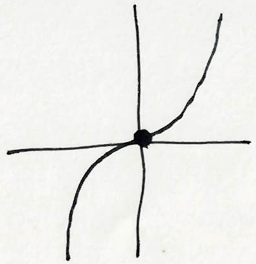
$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0$

2 möglichkeiten.

① $f(x) = x^3 \qquad f' = 3x^2, \quad f'' = (6x).$

$f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 0$

$f'''(0) = 6 \neq 0.$



kein extrema.

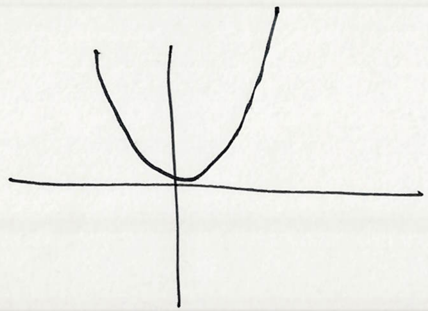
② $f(x) = x^4$

$f' = 4x^3 \qquad f'' = 12x^2 \qquad f''' = 24x$

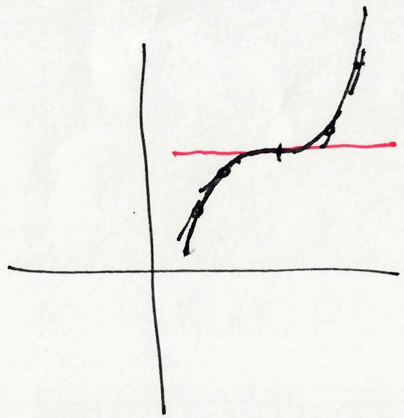
$f^{(IV)} = 24$

$f'(0) = 0 = f''(0) = f'''(0)$

$f^{(IV)} \neq 0.$



Defn ① Ein Sattlepunkt (oder Horizontal Wendepunkt) ist ein Graphenpunkt $(x_0, f(x_0))$ wo $f'(x_0)=0$ aber kein Extrema ist.



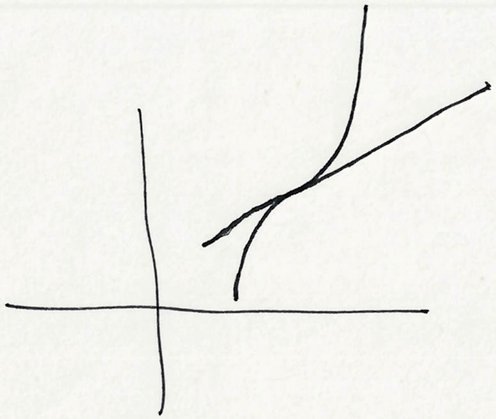
Sattlepunkt

$f'(x_0)=0$

$f''(x_0)=0$.

② Ein Wendepunkt ist ein Graphenpunkt wo der Drehsinn der Tangente sich ändert.

In einem Wendepunk $f''(x_0)=0$ aber $f'(x_0)$ muss nicht 0 sein.



$f''(x_0)=0$

$f'(x_0)\neq 0$. nicht muss 0 sein.

Wendepunkt

Satz Sei $n>0$

$a<x_0<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

in (a,b) $(n+1)$-mal stetig

stetig diff-bar.

Wir nehmen an

$f'(x_0)=0=f''(x_0)=\dots=f^{(n)}(x_0)$
$=0$

① Falls n gerade ist und

x_0 lok. Extrema Stelle

dann folgt $f^{(n+1)}(x_0)=0$.

② Falls n ungerade ist

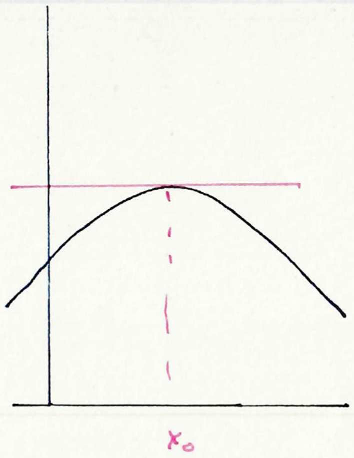
und $f^{(n+1)}(x_0)>0$, so ist

x_0 ein str. lok. min

③ Falls n ungerade, und

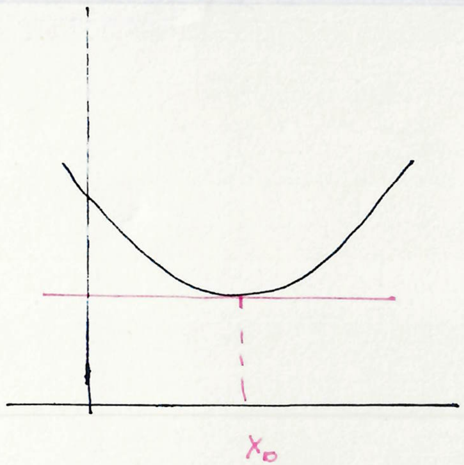
$f^{(n+1)}(x_0)<0$ ist,

so ist x_0 ein lok. max.



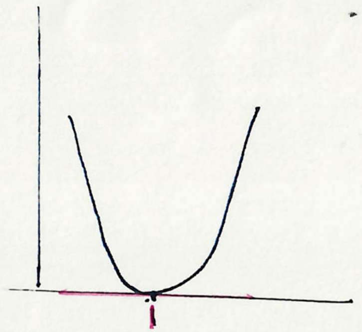
$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0$

lok. max



$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0$

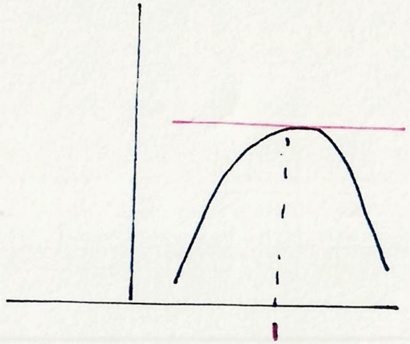
lok. min



$f=(x-1)^4$

$f'(1)=0$
$f''(1)=0$
$f^{(3)}(1)=0$
$f^{(4)}(1)>0$

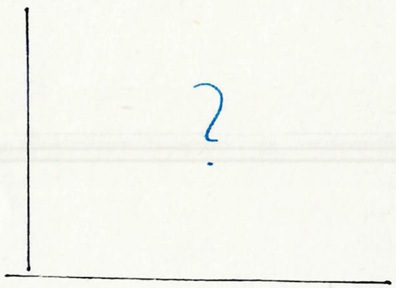
lok. min



$f=-(x-1)^4+4$

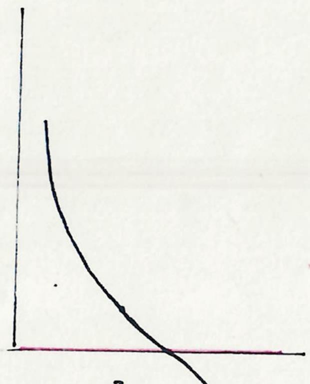
$f'(1)=0$
$f''(1)=0$
$f^{(3)}(1)=0$
$f^{(4)}(1)<0.$

lok. max



$f'(x_0)\neq f''(x_0)=0$

?

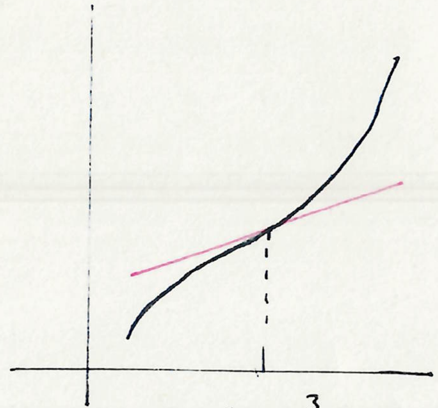


$f=-(x-1)^3$

$f'(1)=0=f''(1)$

$f'''(1)\neq 0$

sattelpunkt



$f=(x-1)^3+x$

$f'(1)=1\neq 0$

$f''(1)=0$ wendepunkt

Bsp. $f(x) = x^4 - x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$
$= x^2(4x-3)$

$f'(x) = 0 \implies \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3}{4} \end{array}\right\}$ Kritische Punkte.

$f''(x) = 12x^2 - 6x$
$= 6x(2x-1)$
$\implies \underbrace{x = 0, \quad x = \frac{1}{2}}_{\text{Wendepunkte}}$.

$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0$
$\implies 0$ ist kein extremen.

$f'''(x) = 24x - 6 \qquad f'''(0) = -6 \neq 0$
$\implies 0$ ist ein Sattelpunkt.

$f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0$

$f''\left(\frac{3}{4}\right) = 6 \cdot \frac{3}{4}\left(2 \cdot \frac{3}{4} - 1\right) > 0$

$\implies \frac{3}{4}$ lok. min.

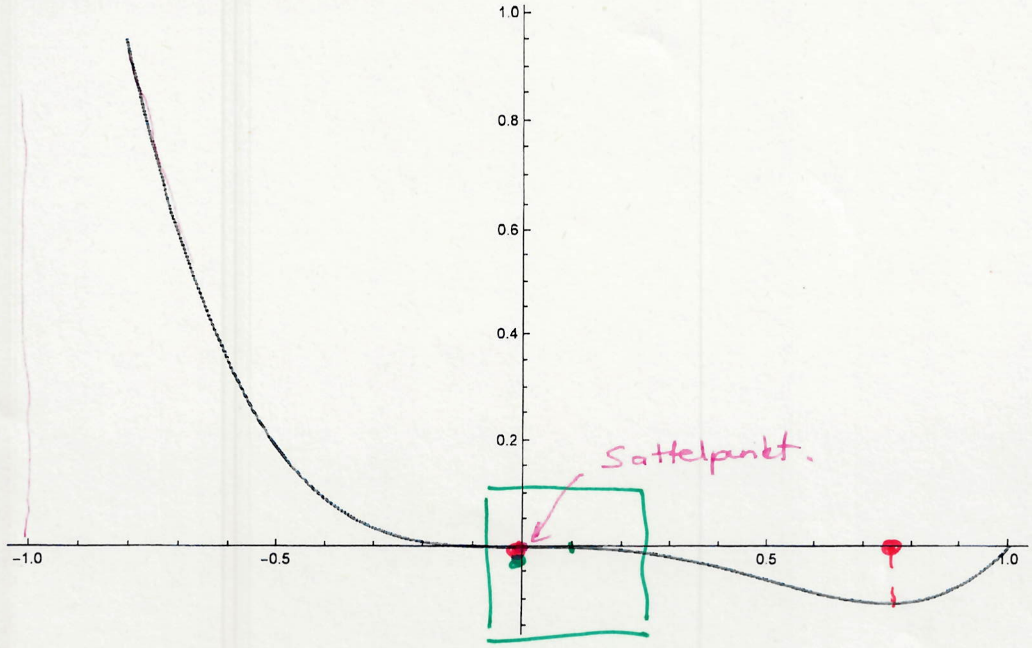
$f'\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0, \quad f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\frac{1}{2}$ – Wendepunkt.

x		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$	
f'	$-$		$-$		$-$		$+$
f''	$+$		$-$		$+$		$+$
f	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	$\cup$		$\cap$		$\cup$		$\cup$.

In[2]:= `Plot[x^4 - x^3, {x, -1, 1}]`

Out[2]=



In[5]:= `Plot[x^4 - x^3, {x, 0, 1.2}]`

Out[5]=